文章编号:1671-7848(2014)01-0023-04

线性模糊微分系统的稳定性

王　磊[1,2]，郭嗣琮[2]
(1. 辽宁工程技术大学 基础教学部, 辽宁 葫芦岛　125105; 2. 辽宁工程技术大学 理学院, 辽宁 阜新　123000)

摘　　要: 利用模糊结构元方法研究了初始条件为模糊数的线性模糊微分系统的稳定性问题。将线性模糊微分系统化成同解的线性分明微分系统，给出了线性模糊微分系统解的解析表示，得到了系统稳定的充要条件。讨论了2维线性模糊微分系统平衡点的类型以及判定条件，说明在一定条件下线性模糊微分系统与线性分明微分系统平衡点的稳定性一致。最后，给出了2个实例并画出了系统相应的轨线，表明了模糊结构元方法的有效性和可行性。

关　键　词: 线性模糊微分系统; 稳定性; 模糊结构元方法
中图分类号: O 159　　　　**文献标志码**: A

Stability of Linear Fuzzy Differential Systems

WANG Lei [1,2], *GUO Si-zong*[2]
(1. Department of Basic Teaching, Liaoning Technical University, Huludao 125105, China;
2. College of Science, Liaoning Technical University, Fuxin 123000, China)

Abstract: The stability problem of linear fuzzy differential systems where the initial condition is described by a fuzzy number is investigated by using fuzzy structured element method. Linear fuzzy differential systems are translated into identical linear crisp differential systems, analytical solution of the linear fuzzy differential systems is given, and the necessary and sufficient condition for making the system stable is given and derived, the type and judgment condition of equilibrium points of two dimensions linear fuzzy differential systems are discussed. It showed that under certain conditions, the stability of linear fuzzy differential systems and linear crisp differential systems is consistent. At last, two illustrated examples and corresponding trajectory showed the feasibility and effectiveness of the fuzzy structured element.

Key words: linear fuzzy differential systems; stability; fuzzy structured element method

1 引　言

在自然界中，存在着一类特殊的不确定的动力系统，这种类型的系统可以通过模糊微分方程来很好地进行描述[1-2]。在 Hukuhara 导数意义下，文献[3-4]利用 Lyapunov 第二方法、文献[5]利用标量方程和比较原理研究了模糊微分系统的稳定及渐进稳定; 文献[6-7]从微分包含的角度研究了模糊微分系统的稳定性; 文献[8-9]等用复数表示模糊数的 λ - 水平截集，从而把线性模糊微分系统转化成线性分明的复微分系统，分别研究了模糊初值和模糊系数矩两种情形下系统平衡点的稳定性; 文献[10]等研究了线性模糊矩阵微分系统平衡点的稳定性。

以上方法的不足是: 一是微分包含没有利用模糊值函数的导数; 二是用 λ - 水平截集函数的导数表示模糊值函数的导数，无法克服 λ - 水平截集的遍历性困难。模糊结构元方法[11]可以解析表示模糊值函数以及模糊值函数的微分和积分，在文献[12-14]中我们利用模糊结构元研究了模糊初值和模糊系数矩两种情形下的线性模糊微分系统的求解问题，本文利用模糊结构元方法研究线性模糊微分系统的稳定性。

2 相关定义和引理

定义 1[11]　设 E 为实数域 $\mathbf{R}$ 上的模糊集，如果隶属函数 $E(z)$, $z \in \mathbf{R}$。满足性质: ① $E(0)=1$; ② 在区间 $[-1,0)$ 上 $E(z)$ 是单增右连续函数，在区间 $(0,1]$ 上是单降左连续函数; ③ 当 $-\infty < z < -1$ 或者 $1 < z < +\infty$ 时，$E(z)=0$，且 $E(-z)=E(z)$，称 E 为 $\mathbf{R}$ 上的对称模糊结构元。

引理 1[11]　设 E 是 $\mathbf{R}$ 上的任意模糊结构元，又设函数 $f(t)$ 在区间 $[-1,1]$ 上是单调有界的，$\hat{f}(t)$ 是 $f(t)$ 的延拓集值函数，则 $\hat{f}(E)$ 是 $\mathbf{R}$ 上有界闭模糊

收稿日期: 2012-05-04;　**收修定稿日期**: 2012-12-04
基金项目: 教育部博士点基金资助项目(20102121110002)
作者简介: 王　磊(1978-)，男，黑龙江鸡西人，副教授，博士，主要从事模糊微分系统，模糊决策等方面的教学与科研工作; 郭嗣琮(1951-)，男，教授，博士生导师。

数,且$\hat{f}(E)$的隶属函数为,这里是$f(t)$关于变量t和y的轮换对称函数(若$f(t)$是连续严格单调的,则$f^{-1}(t)$是$f(t)$的反函数)。

在不引起混淆的情况下,记$\hat{f}(t)$为$f(t)$。

定义2[11] 设二元函数$g(t,y)=f(t)+\omega(t)y$,其中:$f(t)$和$\omega(t)$在$T\subseteq\mathbf{R}$上有界,且$\omega(t)$非负,易知函数$g(t,y)$关于y在$[-1,1]$上单调有界,对于给定的模糊结构元E,称:

$$\tilde{x}(t)=f(t)+\omega(t)E \tag{1}$$

为模糊结构元E线性生成的模糊值函数。对于给定$t\in T$,当$f(t)$和$\omega(t)\geqslant 0$都为常数,则式(1)为由模糊结构元E线性生成的模糊数。

文献[15]证明了对于任何有界模糊数或模糊值函数,均存在一个模糊结构元E,使其能够由这个结构元线性生成。

由对称模糊结构元E线性生成的模糊值函数全体用R_E表示。

定义3 设$\tilde{a},\tilde{b}\in R_E$,记$\tilde{a}=\bar{a}+\bar{a}E$,$\tilde{b}=\bar{b}+\bar{b}E$,其中:$\bar{a},\bar{a},\bar{b},\bar{b}$是实数,且$\bar{a},\bar{b}>0$,则:

$$k_1\tilde{a}\pm k_2\tilde{b}=(k_1\bar{a}\pm k_2\bar{b})+(|k_1\bar{a}|+|k_2\bar{b}|)E$$

且$k_1\tilde{a}\pm k_2\tilde{b}$隶属函数为

$$\mu_{(k_1\tilde{a}\pm k_2\tilde{b})}(x)=E\left(\frac{x-(k_1\bar{a}\pm k_2\bar{b})}{|k_1\bar{a}|+|k_2\bar{b}|}\right)) \tag{2}$$

定义3说明R_E关于模糊数的线性运算封闭。

引理2[11] 设$\tilde{x}(t)\in \mathrm{R}_E$,令$\tilde{x}(t)=f(t)+\omega(t)E$,且$\omega(t)$非负。若函数$f(t)$和$\omega(t)$可导,则:

$$\tilde{x}'(t)=\begin{cases}f'(t)+\omega'(t)E, & \omega'(t)\geqslant 0;\\ f'(t)+(-\omega'(t))E, & \omega'(t)<0\end{cases} \tag{3}$$

引理2说明,对于模糊结构元E线性生成的模糊值函数$\tilde{x}(t)$,其导数函数$\tilde{x}'(t)$也可由模糊结构元E线性生成。

定义4[16] 如果矩阵$A=(a_{ij})\in\mathbf{R}^{n\times n}$的每一个元素$a_{ij}\geqslant 0$,称$A$为非负矩阵,用$A\geqslant 0$表示。如果每一个元素$a_{ij}>0$,则称$A$为正矩阵,用$A>0$表示。

3 主要结果

3.1 n维线性模糊微分系统的稳定性

考虑如下n维线性模糊微分系统

$$\begin{cases}\dot{x}=Ax;\\ x(0)=\tilde{x}_0\end{cases} \tag{4}$$

其中:$A=(a_{ij})_{n\times n}\in\mathbf{R}^{n\times n}$为$n$阶实矩阵;$\dot{x}=(\dot{x}_1(t),\dot{x}_2(t),\ldots,\dot{x}_n(t))^{\mathrm{T}}$;$\tilde{x}_0=(\tilde{x}_{01},\tilde{x}_{02},\ldots\tilde{x}_{0n})^{\mathrm{T}}$为$n$维模糊向量,且$\tilde{x}_0=(\tilde{x}_{01},\tilde{x}_{02},\ldots\tilde{x}_{0n})^{\mathrm{T}}\in R_E^n$。

令$\tilde{x}_{0i}=\bar{x}_{0i}+\bar{x}_{0i}E(i=1,2,\ldots,n)$,于是模糊初值$\tilde{x}_0$表示为

$$\tilde{x}_0=\bar{X}_0+\bar{X}_0E \tag{5}$$

其中:$\bar{X}_0=(\bar{x}_{01},\bar{x}_{02},\ldots\bar{x}_{0n})^{\mathrm{T}}$,$\bar{X}_0=(\bar{x}_{01},\bar{x}_{02},\ldots\bar{x}_{0n})^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n$。由定义1知,未知模糊值函数$x_i(t)\in R_E(i=1,2,\ldots,n)$,记

$$x_i(t)=\bar{x}_i(t)+\bar{x}_i(t)E \tag{6}$$

其中$\bar{x}_i(t)$为未知实函数,且$\bar{x}_i(t)\geqslant 0$,由引理2有:

$$\dot{x}_i(t)=\dot{\bar{x}}_i(t)+\dot{\bar{x}}_i(t)E,\dot{\bar{x}}_i(t)>0 \tag{7}$$

于是n模糊微分系统(4)化为同解的$2n$维分明微分系统:

$$\begin{cases}\dot{X}(t)=SX(t);\\ X(0)=X_0\end{cases} \tag{8}$$

其中:$X(t)=(\bar{X}(t),\bar{X}(t))^{\mathrm{T}}$;$\bar{X}(t)=(\bar{x}_1(t),\bar{x}_2(t),\ldots,\bar{x}_n(t))^{\mathrm{T}}$,$\bar{X}(t)=(\bar{x}_1(t),\bar{x}_2(t),\ldots,\bar{x}_n(t))^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n$;$S=\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & A'\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^{2n\times 2n}$,$A'=(|a_{ij}|)_{n\times n}\in\mathbf{R}^{n\times n}$;$X_0=(\bar{X}_0,\bar{X}_0)^{\mathrm{T}}$。关于系统(4)与系统(8)同解的条件见文献[13]。

系统(8)的求解主要是求出相应的基解矩阵,常用的方法有特征值和特征向量法、哈密顿-凯莱定理法及约当标准型法等。

引理3[8] 设$B\in\mathbf{R}^{n\times n}$,必存在非奇异矩阵$P\in\mathbf{R}^{n\times n}$,使得$P^{-1}BP=J$,其中$J$具有约当标准型$J=\mathrm{diag}[J_1,J_2,\ldots,J_n]$,即

$$P^{-1}BP=\mathrm{diag}[J_1,J_2,\ldots,J_n] \tag{9}$$

于是,系统(9)的解为

$$X(t)=\exp(St)X_0=P\exp(Jt)P^{-1}X_0 \tag{10}$$

由定义3可知系统(4)存在模糊零解$\tilde{0}$,其中$\tilde{0}=0+0E,0\in\mathbf{R}^n$。系统(4)的模糊零解$\tilde{0}$便是系统(8)的分明零解0,因此关于系统(4)模糊零解$\tilde{0}$的稳定性讨论便转化成对系统(8)分明零解0的稳定性讨论。

定理1 系统(4)的模糊零解$\tilde{0}$稳定的充要条件是系统(8)的矩阵S的所有特征值都有非正实部,且每个零实部的特征值都对应S的约当标准形中的一维约当块。

证明 由文献[17]知系统(8)零解0稳定的充要条件是系统(8)的矩阵S的所有特征值都有非正实部,且每个零实部的特征值都对应S的约当标准形中的一维约当块,文献[13]保证了系统(4)与系统(8)同解,由此定理得证。

定理2 若系统(4)的矩阵$A\geqslant 0$,则系统(5)的模糊零解$\tilde{0}$稳定性与以A为矩阵的分明线性齐次微分系统分明零解0的稳定性一致。

证明 若$A\geqslant 0$,则$S=\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & A\end{pmatrix}$。所以$\det(S-\lambda E)=\det(A-\lambda E)\cdot\det(A-\lambda E)=0$,说明矩阵$S$的特征值与矩阵$A$的特征值一致,在由定理1,结论成立。下面讨论2维模糊微分系统的稳定性。

3.1 2维线性模糊微分系统的稳定性

考虑下面2维线性模糊微分系统:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax; \\ x(0) = \tilde{x}_0 \end{cases} \tag{11}$$

其中：$A = (a_{ij})_{n \times n} \in \mathbf{R}^{2 \times 2}$ 为 2 阶实矩阵；$\dot{x} = (\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t))^{\mathrm{T}}$；$\tilde{x}_0 = (\tilde{x}_{01}, \tilde{x}_{02})^{\mathrm{T}} \in R_E^2$。

对于系统(11)存在齐次仿射变换，即存在 2 阶非奇异实矩阵 Q 使得 $Q^{-1}AQ = C$，于是系统(11)便化为

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = Cy(t); \\ y(0) = \tilde{y}_0 \end{cases} \tag{12}$$

且 $\tilde{x}_0 = Q\tilde{y}_0$。其中，实矩阵 C 具有下列三种形式：

$$C = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

$\lambda, \lambda_1, \lambda_2, a, b \in \mathrm{R}$。由于系统(11)和系统(12)的轨线具有相同的拓扑结构，下面讨论系统(12)的稳定性。

定理 3　若 $C = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$，当 $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ 或 $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ 时，系统(11)的平衡点为不稳定的结点；当 $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$ 或 $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$，且 $A \geqslant 0$ 时，系统(11)的平衡点为鞍点。

证明　若 $C = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$，则 $S = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & |\lambda_1| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |\lambda_2| \end{bmatrix}$，

当 $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ 或 $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ 时，$S = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$，

由定理 1 知系统(11)的平衡点为不稳定的结点；当 $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$ 或 $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$，且 $A \geqslant 0$ 时，$S = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ 由定理 1 知系统(11)的平衡点为鞍点。

定理 4　若 $C = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$，当 $\lambda > 0$ 时，系统(11)的平衡点为不稳定的临界结点。

证明　类似定理 3 的证明方式，结论成立。

定理 5　若 $C = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$，当 $a > 0$ 且 $A \geqslant 0$ 时，系统(11)的平衡点为不稳定的焦点；当 $a = 0$ 且 $A \geqslant 0$ 时，系统(11)的平衡点为中心。

证明　类似定理 3 的证明方式，结论成立。

4　实　例

例 1　考虑如下模糊微分系统：

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}; \\ \tilde{x}_1(0) = 1 + E, \tilde{x}_2(0) = 2 + E \end{cases} \tag{13}$$

的稳定性。

若 $A \geqslant 0$，由定理 3 知系统(13)的平衡点为鞍点，且可化为系统：

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{\underline{x}}_1(t) \\ \dot{\underline{x}}_2(t) \\ \dot{\overline{x}}_1(t) \\ \dot{\overline{x}}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{x}_1(t) \\ \underline{x}_2(t) \\ \overline{x}_1(t) \\ \overline{x}_2(t) \end{pmatrix}; \\ \underline{x}_1(0) = 1, \underline{x}_2(0) = 2, \overline{x}_1(0) = 1, \overline{x}_2(0) = 1 \end{cases} \tag{14}$$

由引理 3 得系统(13)解的模糊结构元解析表示为

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} \\ 3\mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} \\ 3\mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix} E \tag{15}$$

如果在 (x_1, x_2) 相平面的其他 3 个象限分别来取模糊初值 $(-1+E, 2+E)$，$(-1+E, -2+E)$，$(1+E, -2+E)$，那么系统平衡点的轨线[18]分布如图 1 所示。

由于系统(13)的模糊解可以由模糊结构元解析表示，所从图 1 可以看出轨线上的每一点为模糊数。

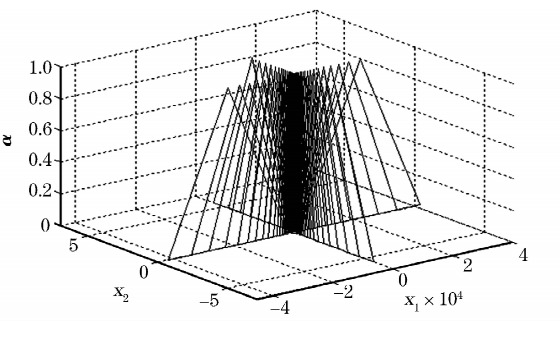

图 1　系统(13)的轨线分布

Fig. 1　Trajectory distribution of systems(13)

例 2　考虑下面模糊微分系统：

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}; \\ \tilde{x}_1(0) = 1 + E, \tilde{x}_2(0) = 3 + E \end{cases} \tag{16}$$

的稳定性。

若 $A \geqslant 0$，由定理 4 知系统(16)的平衡点为中心，且可化为系统：

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{\bar{x}}_1(t) \\ \dot{\bar{x}}_2(t) \\ \dot{\bar{x}}_1(t) \\ \dot{\bar{x}}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_1(t) \\ \bar{x}_2(t) \\ \bar{x}_1(t) \\ \bar{x}_2(t) \end{pmatrix}; \\ \bar{x}_1(0) = 1, \bar{x}_2(0) = 3, \bar{x}_1(0) = 1, \bar{x}_2(0) = 1 \end{cases} \tag{17}$$

由引理 3 得系统(16)解的模糊结构元解析表示为

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2t - 3\sin 2t \\ \sin 2t + 3\cos 2t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos 2t - \sin 2t \\ \cos 2t + \sin 2t \end{pmatrix} E \tag{18}$$

若在(x_1,x_2)相平面的其他 3 个象限分别取模糊初值:

$(-1+E, 3+E)$,$(-1+E, -3+E)$,$(1+E, -3+E)$

那么系统平衡点的轨线分布如图 2 所示。由于系统(16)的模糊解可以由模糊结构元解析表示,从图 2 也可看出轨线上的每一点都为模糊数。

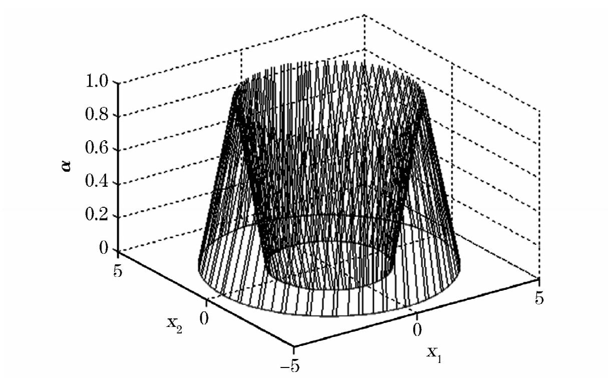

图 2 系统(16)的轨线分布

Fig. 2 Trajectory distribution of systems(16)

5 结 论

本文利用模糊结构元方法将线性模糊微分系统化成同解的分明微分系统，讨论了系统平衡点的类型。重点讨论了 2 维线性模糊微分系统平衡点的类型及判定条件，结论表明，在系统的参数矩阵 $A \geqslant 0$ 的情况下，线性模糊微分系统平衡点的稳定性与分明线性微分系统平衡点的稳定性一致。模糊结构元方法的优点是可以解析的把系统的解表示出来，进而画出系统平衡点的轨线分布来直观的说明系统平衡点的类型。除了从系统解的角度研究平衡点的稳定性之外，也可以从系统结构本身去讨论稳定性，即 Lyapunov 第二方法[19]。关于非线性模糊微分系统的稳定性的研究，是下一步的工作。

参考文献(References):

[1] Buckley J J, Feuring T, hayashi Y. Linear system of first order ordinary differential equations: fuzzy initial conditions[J]. Soft Computing, 2002, 6(6): 415-421.

[2] Nieto J J, Rodrguez-Lpez R, Georgioud D N. Fuzzy differential systems under generalized metric space approach[J]. Dynamic Systems and Applications, 2008, 17(1): 1-24.

[3] Park J Y, Han H K, Jeong J U. Asymptotic behavior of solutions of fuzzy differential equations[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1997, 91(3): 361-364.

[4] Song S J, Wu C, Lee E S. Asymptotic equilibrium and stability of fuzzy differential equations[J]. Computers & Mathematics with Applications, 2005, 49(7): 1267-1277.

[5] Hien L V. A Note on the asymptotic stability of fuzzy differential equations[J]. Ukrainian Mathematical Journal, 2005, 57(7): 1066-1076

[6] Diamond P M. Stability and periodicity in fuzzy differential equations[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2000, 8(5): 583-590.

[7] Bhaskar T G, Lakshmikantham V, Devi V. Revisiting fuzzy differential equations[J]. Nonlinear Analysis 2004,58(3):351-358.

[8] Xu J P, Liao Z G, Hu Z N. A class of linear differential dynamical systems with fuzzy initial condition[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2007, 158(21): 2339-2358.

[9] Xu J P, Liao Z G, Nieto J J. A class of linear differential dynamical systems with fuzzy matrices[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2010, 368(1): 54-68.

[10] Ghazanfari B, Niazi S, Ghazanfari A G. Linear matrix differential dynamical systems with fuzzy matrices[J]. Applied Mathematical Modelling, 2012, 36(1): 348-356.

[11] 郭嗣琮，苏志雄，王 磊. 模糊分析计算中的结构元方法[J]. 模糊系统与数学, 2004,18(4): 68-75. (Guo Sizong, Su Zhixiong, Wang Lei. Method of structured element in fuzzy analysis and calculation[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2004, 18(4): 68-75.)

[12] 王 磊, 郭嗣琮. 求解一类模糊线性微分系统的结构元方法[J]. 模糊系统与数学, 2012, 26 (3): 9-16. (Wang Lei, Guo Sizong. Solving a Class of Fuzzy Linear Differential Systems by Structured Element Method[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2012, 26 (3): 9-16.)

[13] 王 磊, 郭嗣琮. 线性生成的完全模糊线性微分系统[J]. 系统工程理论与实践, 2012, 32(2): 341-348. (Wang Lei, Guo Sizong. Linear formed full fuzzy linear differential systems[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2012, 32(2): 341-348.)

[14] 王 磊. 模糊线性微分系统的近似解析解[J]. 合肥工业大学学报, 2012, 35(7): 1001-1004. (Wang Lei. Approximate analytical solutions of fuzzy linear differential system [J]. Journal of Heifei university of technology, 2012, 35(7): 1001-1004.)

[15] 郭嗣琮. 模糊数与模糊值函数的结构元线性生成[J]. 辽宁工程技术大学学报, 2006, 25(3): 475-477. (Guo Sizong. Linear representation of fuzzy number and fuzzy-valued function using fuzzy structured element[J]. Joumal of Liaoning Technical University, 2006, 25(3): 475-477.)

[16] 戴华. 矩阵论[M]. 北京: 科学出版社, 2001. (Dai Hua. Matrix theory[M]. Beijing: Science Press, 2001.)

[17] 陆启韶, 彭临平, 杨卓琴. 常微分方程与动力系统[M]. 北京:北京航空航天大学出版社,2010. (Lu Qishao, Peng Linping, Yang Zhuoqin. Ordinary differential equations and dynamical systemsM]. Beijing: Beijing University of Aeronautics and Astronautics Press,2010.)

[18] 王五生. 自治系统的积分曲线和相轨线[J]. 云南大学学报, 2008, 30(S2): 125-127. (Wang Wusheng. Integral curves and phase trajectories of autonomous systems [J]. Journal of Yunnan university, 2008, 30(S2): 125-127.)

[19] 许文琳,吴蓉晖. 模模糊控制系统的李亚普诺夫第二法稳定性分析[J]. 湖南大学学报, 2004, 31(3): 86-89. (XU Wenlin, WU Ronghui. Lyapunov's indirect method for stability analysis of fuzzy control system [J]. Journal of Hunan university, 2004, 31(3): 86-89.)